754. 確率法則ノ分解問題, VI

北川　敏男（阪大）

§8. $\mathfrak{K}\{\mathfrak{L}\}$, $\mathfrak{K}^*\{\mathfrak{L}\}$ ニ於ケル $\mathfrak{L}$ ノ分解問題（続キ）

前回ニ述ベタ $\mathfrak{K}\{\Phi\}$ ニ関シテハ, 更ニ附加スベキ事ガアルガ、都合上後述ニ譲リ、次ノ論題ニ移ラウ。

〔2〕 安定ナ確率法則： 前回 §8 デ定義シタ如ク、$\mathfrak{K}^*\{F\}$ ガ結合ニ関シテ閉ヂテ居ルヤウナ確率法則（＝分布函数）ヲ $F(x)$ ヲ意味スル。即チ次ノ性質ヲモツ様ナ分布函数 $F(x)$ ナイフノデアル：

(S_1) $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ ガ相互ニ独立デ、且ツ共ニ $F(x)$ ヲ分布函数トスルトキニハ, 任意ノ $a_1>0$, $a_2>0$ ニ對シテ

$$(33)\qquad a_1\mathfrak{X}_1 + a_2\mathfrak{X}_2 = a\mathfrak{X}$$

トナル様ナ $a=\rho(a_1, a_2)$ ト、$F(x)$ ヲ分布函数トスル確率

変数$\mathfrak{X}$トガ定マル。

$\mathfrak{K}^*[F]$ニ於ケル分解問題トシテ、安定ナ確率法則ハ果シテ存在スルカ($\Phi(\mathfrak{X})$以外ニモ)，又ソノ一般ノ形ハ何カトイフ問題ガ第一ニ起ルノハ當然デアロウ。シカノミナラズ，コノ問題ハ，次ノ二ツノ問題ニモ関聯シテクル。ソノ第一ハ，*Gauss*ノ法則ノ牽引域ニ属シナイ確率法則ノ例ヲ求メルコト，ソノ第二ハ，無限ニ分解可能ナ確率法則ノ簡単ナ例ヲ求メルコトデアル。コノ方面ヲ開拓シタ*Lévy*ノ興味モ、コノ後ノ二問題ニ在ツタト思ハレル。然シ次ノ發展ニ備ヘルトイフ立場カラハ、$\mathfrak{K}^*[F]$ニ於ケル分解問題ニ関スル一ツノ結果トシテ眺メルベキデハナカロウカ。

安定ナ確率法則ノ上述ノ問題ハ*Lévy*ニ依リ完全ニ解カレテ居ル：

定理8. (*Lévy*)：安定ナ確率法則ノ特性函数$f(t)$ハ必ズ次ノ四種類ノ函数ノ何レカニナル：

$$
(34)\begin{cases}
\text{I. } \exp\left\{\dfrac{c}{\Gamma(\alpha+1)}\left(-1+i\dfrac{t}{|t|}\beta\tan\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)|t|^{\alpha}\right\} & \begin{pmatrix} 0<\alpha<1 \\ -1\leqq\beta\leqq 1 \\ c\geqq 0\end{pmatrix} \\
\text{II. } \exp\{-c_0|t|+ic_1t\} & (c_0\geqq 0,\ c_1 \text{ real}) \\
\text{III. } \exp\left\{\dfrac{c}{\Gamma(\alpha+1)}\left(-1+i\dfrac{t}{|t|}\beta\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)|t|^{\alpha}\right\} & \begin{pmatrix} 1<\alpha<2 \\ -1\leqq\beta\leqq 1 \\ c\geqq 0\end{pmatrix} \\
\text{IV. } \exp\{imt\}\ (m \text{ real}) \text{ 又ハ } \exp\left\{\dfrac{-\lambda t^2}{2}\right\} & (\lambda\geqq 0)
\end{cases}
$$

逆ニ(34)ノ I－IV ノ何レノ函数モ，*parameters* α, β, c_0, c_1, λ, m等ヲ夫々ノ附帯條件ノ下デ任意ニ與フル

トキ、常ニ安定ナ特性函数ヲ表ハス。

コノ定理ノ証明ハ，私ノ知レル範囲デハ、二通リノ方法ガアル。ソノ何レモ共ニ、次ノ補助定理ヲ用キル。

<u>補助定理9</u>： 安定ナ確率法則ノ特性函数 $f(t)$ ハ適当ニ $c_0 \geqq 0$, c_1, α ナル実数ヲ選ブコトニ依リ、

$$(35) \quad f(t) = exp\left\{\left(-c_0 + i\frac{t}{|t|}c_1\right)|t|^{\alpha}\right\} \quad (-\infty < t < \infty)$$

ノ形ニ表ハシ得ル。而シテ、茲ニ(33)ノ a_1, a_2, a ニ関シテハ

$$(36) \quad a \equiv \rho(a_1, a_2) = (a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$$

ナル関係ガアル。

Lévy ノコノ定理ノ証明ノ記述ハ、少シク簡単ニスギルト思ハレルカラ、私ハ後デ、詳シク述ベテ見ルガ、先ヅコノ補助定理ノ成立ヲ假定シテ、定理9ノ二ツノ証明法 A, B ヲ述ベテ置カウ。

<u>A. 無限ニ分解可能ナ確率法則ノ結果ヲ利用スル方法</u>

<u>補助定理10</u>： 安定ナ確率法則ハ無限ニ分解可能デアル。

<u>証明</u>： X ノ分布函数 $F(x)$ ハ安定デアルトスル。補助定理9ノ(36)式ニ依リ、カゝル $F(x)$ ニ對シテハ次ノ様ナ $\alpha > 0$ ガ存在スル；

n ヲ任意ノ自然数トスルトキ，相互ニ独立デ且ツ皆 F ヲ分布函数ニスルヤウナ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ニ對シテ，分解

$$(37)\qquad \mathbb{X} = \frac{1}{n^{\alpha}}(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \cdots\cdots + \mathbb{X}_n) \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

ガ出來ル。ソコデ、$\mathbb{X}$ガ無限ニ分解出來ルコトヲイフニハ、任意ノ$\varepsilon>0$ニ對シテ

$$(38)\qquad \lim_{n\to\infty}\ \underset{1\leqq k\leqq n}{\mathrm{Max.}}\ \Pr.\left[\left|\frac{\mathbb{X}_k}{n^{\alpha}}\right| \geqq \varepsilon\right] = 0$$

ヲ示セバヨイ。シカルニ、コレハ明カニ成立スル。蓋シコノ場合(37)ニ依リ上式ノ$\lim$ノ内ハ$1-F(n^{\alpha}\varepsilon)+F(-n^{\alpha}\varepsilon)$ニ等シク、コレハ$\alpha>0$ニヨリ、$n\to\infty$ノトキ$0$トナルカラデアル。〔證終〕

然ルニ、無限ニ分解可能ナ確率法則ハ定理2(II)ニヨリソノ形ガ與ヘラレテ居ル。ソレ故先ヅ$0<\alpha\leqq 2$ナルコトガ分ルノデアル。(定理2ニ於テ$n(u)$ニ關スル條件カラ)ソコデ補助定理9ト睨ミ合セテ$0<\alpha<1$, $\alpha=1$, $1<\alpha<2$, $\alpha=2$ノ場合ヲ、夫々調ベテ行ケバヨイ。コレニ關スル議論ハ Lévy ノ書ニ詳シイ。

B. 確率法則ノ牽引域ヲ利用スル方法　分布函數$G(x)$ガ$F(x)$ノ牽引域ニ属スルトイフノハ、相互ニ独立デ且ツ、皆$G(x)$ヲ分布函數トスルヤウナ独立ナ確率変數ノ系列$\{\mathbb{X}_n\}$ニ對シテ、適當ニ常數列$\{A_n\}$, $\{N_n\}$ヲトレバ、$(S_n-A_n)/N_n$(但シ$S_n=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$)ノ分布函數ガ、$n\to\infty$ノトキ、$F(x)$ノスベテノ連續点デ、$F(x)$ニ、收斂スルコトヲ意味スル。コノトキ必然的ニ、$F(x)$又一ツノ分布函數トナル。ソコデ、$F(x)$ガ分布函數デアルコトヲ示スノガ直接ニハ困難ナトキ、$F(x)$ノ牽引域ニ分布函

数 $G(x)$ ガ存在シテ居ルコトヲ示スコトニ依リ、目的ヲ達スルコトガ出來ル。今ノ場合、(35) ナル函数ガ特性函数デアルコト即チ、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x) = f(t)$ トナルヤウナ分布函数 $f(t)$ ノ存在ヲ示スノニ、コノ考ヘヲ用キルコトガ出來ル。ソレモ実際 *Lévy* ノ旧著[2] ニ於テ與ヘラレテ居ル。

以上定理9ノ証明ハ概略ニ止メ、次ニ

補助定理9ノ証明ヲ示サウ。函数方程式

$$f(a_1t)\,f(a_2t) = f(\rho(a_1,a_2)\,t) \quad (-\infty<t<\infty) \quad a_1>0,\ a_2>0 \tag{39}$$

ガFノ特性函数ニ関シテ成立ツ。問題ハコレヲ解ク事デアル。

今 $a_1 = a_2 = 1$ トオケバ、$\rho(1,1) = q$ トオクトキ

$$f(t)^2 = f(qt) \tag{40}$$

トナル。$q = 1$ トスレバ，f ノ連続性ニヨリ $f(t) \equiv 1$ (trivial)，$f(t) \equiv 0$ (alsurd) ニナル。依ッテ $q \gtrless 1$ トシテ論ズレバヨイ。

$q \gtrless 1$ ノ何レニシテモ，$f(\zeta) = 0$ トナルヤウナ ζ ハ存在シ得ナイ。〔何者、$q > 1$ ノ場合，$f(\zeta) = 0$ トスルト，(40) ト f ノ連続性トカラ $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(q^{-n}\zeta) = f(\zeta) = 0.$

一方 f ハ特性函数ダカラ $f(0) = 1$. コレハ矛盾デアル。

$0 < q < 1$ ノトキモ同様〕

依ッテ $\log f(t) = \psi(t)$ ハ，$\psi(1) = 0$ ト規約スル事

---

(2) *Calcul des probabilités* Chapitre VI, *Les lois exceptionnelles* p. 252—277.

ニ依リ、一意的ニ決定サレル。ψニ関シテハ(39)カラ、

$$(41)\quad \psi(a_1 t)+\psi(a_2 t)=\psi(\rho(a_1, a_2)t)$$
$$(-\infty<t<\infty)$$

ナル函数方程式ガ成立スル。

茲デ、吾々ハ $a=\rho(a_1, a_2)$ ナル函数ヲ調ベテミルト：

$$(42)\quad \begin{cases} 1^\circ. & \rho(a_1, a_2)=\rho(a_2, a_1) \\ 2^\circ. & \rho(a_1, a_2)=a_1\rho(1, \frac{a_2}{a_1})\equiv a_1 h(\frac{a_2}{a_1}) \\ 3^\circ. & h(\alpha)\equiv\rho(1,\alpha) \text{ ハ } \alpha>0 \text{ ニテ連続} \\ 4^\circ. & h(\alpha) \text{ ハ } \alpha>0 \text{ デ純単調増加且ツ } h(\alpha)>\alpha. \end{cases}$$

コノウチ 4° ノミガ証明ヲ要スルデアロウ。4°ヲ示スニハ：

(i) 若シ $h(\alpha_1)=h(\alpha_2)$ ナラバ必ズ $\alpha_1=\alpha_2$. 若シ, $\alpha_1>\alpha_2$ トスレバ $f(\alpha_1 t)=f(\alpha_2 t)$ $(-\infty<t<\infty)$ コレハ, 前述ニ示シタ如ク考ヘナクテヨイ f トナル。

(ii) $h(\alpha)>\alpha$. 何者、散縮度増加ノ原理ニヨリ、$f(t)$, $f(\alpha t)$, $f(h(\alpha)t)$, ヲ夫々特性函数トスル分布函数ノ濃度函数ヲ夫々 $Q(l)$, $Q_1(l)$, $Q_2(l)$ トスルト, $Q_1(l)>Q_2(l)$ (充分大ナルスベテノ l ニツイテ) 然ルニ $Q_1(l)=Q(l/\alpha)$, $Q_2(l)=Q(l/h(\alpha))$ デアルカラ、$Q(\frac{l}{\alpha})>Q(l/h(\alpha))$. 然ルニ、$Q$ ハ単調増加ダカラ $h(\alpha)>\alpha$。(i), (ii) ト 3° トカラ 4°ヲ得ル。

次ニ、$h(h(1))=u(2)$, $h(u(2))=u(3)$, ……, $h(u(n))=u(n+1)$ トオクトキ、(41) カラスベテノ自然数 n ニ對シテ $n\psi(t)=\psi(u(n)t)$ トナル。次ニ正ノ有理数 $\lambda=\frac{m}{n}$ ニ對シテハ $m\psi(t)=\psi(u(m)t)$ ト上式ト

カラ、$\lambda\psi(t)=\psi\left(\frac{u(m)}{u(n)}t\right)$トナル。

ソコデ有理数λニ對シテ$u(\lambda)=\frac{u(m)}{u(n)}$ト定義スルコトニヨリ、函数$u$ノ定義域ヲバ、スベテノ正ノ有理数ニマデ拡張スル。$\lambda$ノexpressionニ関セズ一意ニキマルコトハ

$$\lambda\psi(t)=\psi\left(\frac{u(m')}{u(n')}t\right)=\psi\left(\frac{u(m)}{u(n)}t\right)$$

カラ明ラカ。

カクシテ定メラレタ$u(\lambda)$ハ純単調増加、依ッテ無理数λニ對シテモ$u(\lambda)$ヲ定義シテ$\lambda\psi(t)=\psi(u(\lambda)t)$ $(-\infty<t<\infty)$ナル様ナ純単調増加$u(\lambda)$ヲツクリウル。明カニ、$u(n)>n$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 従ッテ、$t>0$ヲ如何ニ與ヘテモ、$t=u(s)$トナル様ナ$s>0$ガキマル、依ッテ

$$\lambda\psi(u(s))=\psi(u(\lambda)u(s)) \tag{43}$$

依ッテ$\psi(u(s))=s$. ψハ純単調増加函数ノ逆函数トナル。

故ニ、$u(s)u(\lambda)=u(s\lambda)$ $(s>0,\lambda>0)$ナル純単調増加ナuヲ求メレバヨイ。コレカラ、(35)(36)ニ到達スル。

—(証明終)—